



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA PE ȘCOALĂ CU SUBIECT UNIC

CLASA a 11-a

București, 13 februarie 2026

SUBIECTE

Problema 1

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = 3I_3 - A$ și $M_x = \frac{x}{3}B + \frac{1}{3x^2}A$, unde x este

un număr real nenul.

- a) Arătați că $B^2 = 3B$.
- b) Arătați că $M_x \cdot M_y = M_{xy}$, pentru orice numere reale nenule x, y .
- c) Arătați că $\det(M_x) \neq 0$, pentru orice număr real nenul x .

Problema 2

Arătați că relația de recurență $a_0 \in [0, 1]$ și $a_{n+1} = \sqrt{a_n - a_n^2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ definește un șir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și studiați limita acestuia.

Gazeta matematică

Problema 3

Fie n un număr natural nenul și A o matrice $n \times n$ inversabilă, cu elemente numere reale și care verifică relația $A + A^{-1} = I_n$.

- a) Demonstrați că $A^3 = -I_n$.
- b) Arătați că n este un număr par.
- c) Determinați $\det(A + I_n)$.

Problema 4

a) Arătați că, dacă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este periodică și limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ există, atunci această limită este nulă.

b) Dați exemplu de funcție periodică $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x}$ nu există.

Justificați răspunsul!

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 22,5 de puncte, punctajul maxim posibil fiind 100 puncte, din care 10 puncte sunt din oficiu.